



TITLE:

安定性予想に関するPlissの結果について (力学系における非線形回路の諸問題)

AUTHOR(S):

垣内, 伸彦

CITATION:

垣内, 伸彦. 安定性予想に関するPlissの結果について (力学系における非線形回路の諸問題). 数理解析研究所講究録 1979, 370: 64-77

ISSUE DATE:

1979-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104673>

RIGHT:

安定性予想に関する Pliss の結果について

愛知大学教養部 垣内伸彦

I はじめに

次の安定性予想が S. Smale によって提出されて以来 10 余年がすぎた。

安定性予想: $f \in \text{Diff}^1(M)$ が構造安定であることと次の 2 条件は同値である。 i) f は Axiom A を満たす。 ii) f は Strong Transversality Condition を満たす。

この 2 条件から構造安定を導き出す方向は, Robbin, Melo, Robison, etc によって 1976 年に最終的に解決した。一方その逆問題は未解決で当面の焦点は $\dim M = 2$ の場合である。(今春 Birkley から帰国した鈴木治夫教授(北大)の情報によれば中国の研究者 廖山涛 が $\dim M = 2$ の場合を解決したようであるが、我々はまだその事実を確認できていない。)

さて、この報告は $\dim M = 2$ の場合の 1 つの到達点である次の Pliss の結果の基本的な idea を説明することを目的とする。

定理 [7] $\dot{x} = X(x, t)$ $x \in \mathbb{R}^2$ を Time-Dependent 1-Periodic System (以下 T.D.P.S. と略す) とする。その invariant set I が

次の条件を満すとき, I は hyperbolic structure をもつ。

- i) $x = X(x, t)$ は uniformly coarse である。 ii) periodic orbit は I のなかで dense である。 iii) $\text{Meas } I = 0$

最近 C. Robinson [8] は この定理を $x \in M$ と一般化し, 証明の一部を改良した。我々は この論文 [8] と P/iss の原論文 ([3], [4], [5], [6], [7]) に基づき検討を進めよう。

II 諸定義と諸結果

そのために必要不可欠な概念の定義と既に知られている結果をまとめておこう。

1) 諸定義 まず T. D. P. S. $x = X(x, t)$ $x \in M$ が与えられている。この $x = X(x, t)$ が uniformly coarse とは ある $\varepsilon > 0$ が存在して C^1 -topology で ε 以内の任意の T. D. P. S. である Y が 0 を特性指数として持たないことである。 $M' = \mathbb{R} \times M / \sim$ とする。

$x = X(x, t)$ は M' 上の Time-Independent Flow と考えられるが このとき $I \subset M'$ が次の条件を満たすとき invariant set といふ $(t_0, x_0) \in I$ ならば その解 $\varphi(t, t_0, x_0)$ は 任意の t に対して I に属する。 invariant set I が次の条件を満たすとき I は hyperbolic structure を持つといふ。 i) 任意の $(t, x) \in I$ に対して continuous

splitting が存在して $T\varphi(t, t, x)$ -invariant である。 $T_x M = E_{(t,x)}^u \oplus E_{(t,x)}^s$

ii) $E_{(t,x)}^u = E_{(t+1,x)}^u$, $E_{(t,x)}^s = E_{(t+1,x)}^s$ iii) 実数 $C > 0$, $0 < \lambda < 1$

が存在して 次の条件を満たす。 a) $v \in E_{(t,x)}^s$ $t > t_0$ のとき

$|T\varphi(\tau, t, x)u| < C\lambda^{t-\tau}|u|$ b) $u \in E_{(t,x)}^u$, $\tau < t$ のとき $|T\varphi(\tau, t, x)u| < C\lambda^{t-\tau}|u|$. 従って $T\varphi(\tau, t, x)$ は $T_x M$ から $T_{\varphi(\tau, t, x)} M$ への derivative map である。

2) 諸結果 以下 $\dot{x} = X(x, t)$ は uniformly coarse で I は 何の invariant set とする。

i) I には continuous splitting が存在する (Pliss [3], Mañé [2])

ii) この splitting を使って 座標変換を行くと $\dot{x} = X(x, t)$ は 次のようにかける $\dot{y} = P(t)y + X'(y, t)$ $P(t) = \begin{pmatrix} p(t, y) & 0 \\ 0 & g(t, y) \end{pmatrix}$

この $p(t, y)$, $g(t, y)$ は 1 階微分に相当する部分で 今後の議論に本質的役割を果たす。

iii) もとの metric を d とし, 座標変換を行った新しい metric を d' とする。このとき 正数 $N > 1$ が存在して 次式が成立する。

$$N^{-1}d(x, y) < d'(x, y) < Nd(x, y) \quad (\text{Pliss [3]})$$

iv) $C > 0$ と $\varepsilon > 0$ が存在して 任意の $(t, x) \in I$, 任意の $\tau < t$ に対して 次式が成立する。

$$\int_{\tau}^t \{g(\alpha, x) - p(\alpha, x)\} d\alpha \leq \varepsilon - C(t - \tau)$$

この性質を uniformly integrably separated (略して U.I.S.)

ということにする。 (Pliss [3], Mañé [2])

v) 任意の periodic orbit $(t, x) \in I$ に関して ある数 $h > 0$ が存在して 次式が成立する。従って τ は 何の period とする

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} p(\alpha, x) d\alpha > h, \quad \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g(\alpha, x) d\alpha < -h \quad (\text{Franko [1]})$$

III 問題設定と証明の各段階

さて我々の目標は次の定理の idea の基本を探ることにある。

定理. uniformly coarse な T.D.P.S. $x = X(x, t)$

$x \in M$, $\dim M = 2$ が与えられている。 $I \subset M' = \mathbb{R} \times M / \sim$ を compact invariant set で次の条件を満たすものとする。

i) periodic orbit は I で dense である, ii) $\text{Meas } I = 0$.

このとき I は hyperbolic structure を持つ。

○ 先ず hyperbolic structure を別の言葉に書き直そう。

II で登場した関数 $p(t, x)$, $g(t, x)$ を使うと I が hyperbolic structure を持つことと次の事は同値である。

2つの定数 $C' > 0$, $e' > 0$ が存在して任意の $(t, x) \in I$, 任意の $T > \tau$ に対して次式が成立する。

$$\int_{\tau}^T p(\alpha, x) d\alpha \geq C'(T - \tau) - e', \quad \int_{\tau}^T g(\alpha, x) d\alpha \leq e' - C'(T - \tau).$$

これは Time 1 map $\varphi(1, 0, x)$ の $E_{(0, x)}^u$, $E_{(0, x)}^s$ 方向の derivative $T\varphi(1, 0, x)$ が $\begin{pmatrix} e^{\int_0^1 p d\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^1 g d\alpha} \end{pmatrix}$ であることから直ちに导出。

○ さて我々はこの定理を背理法で証明しよう。ここで $p(t, x)$, $g(t, x)$ に関する上の2式の「いずれか一方のみ」を注目して一般性を失わずにことに注意する。ここでは $p(t, x)$ に関する式を否定して矛盾を導くことにする。我々の出発点は次の様に存する。

任意の $\delta > 0$ と任意の $D > 0$ に対して, $T > \tau$, $(t, x) \in I$ がそれぞれ存在して $\int_{\tau}^T p(\alpha, x) d\alpha < \delta(T - \tau) - D$ が成立する。

○ 上式からどのようにして矛盾を導き出すのか, それを簡単に述べれば次の様である。必要ならば δ をいくらでも 0 に近づけ

D をいくらでも大きくとり, 長い時間 $[0, \tau]$ の間 積分値 $\int_0^t p d\alpha$ の小さい点 $(t, x) \in I$ を見つける。この $[0, \tau]$ の間に積分値の大きい区間 $[t_{2i}, t_{2i+1}]$ が多く存在するという奇妙な現象を closing lemma の variation (Pliss [5]) を使って示し, この事実と $\text{Meas } I = 0$ を使って矛盾に導くのである。

○ この作業を Robinson に従って 3 段階に分けてみよう。

Step I. $(0, x) \in I$ を通る orbit $\varphi(t, 0, x)$ で次の条件を満たすものを見つける (定数は後で解説する)

$$d'(\alpha, \varphi(\tau, 0, x)) < \frac{\delta}{20} \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\int_0^t p(\alpha, x) d\alpha \leq \delta t + M \quad 0 \leq t \leq \sigma/\delta \dots\dots (3.2)$$

$$\int_0^t p(\alpha, x) d\alpha \leq 0.7ht + M \quad 0 \leq t \leq \tau \dots\dots (3.3)$$

Step II. 上の $[0, \tau]$ の中に次の条件を満たす $2l+1$ 個の disjoint interval $[t_{2i}, t_{2i+1}]$ の存在を示す。

$$i) \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} p(\alpha, x) d\alpha > 0.8h(t_{2i+1} - t_{2i})$$

$$ii) t_{2i+1} - t_{2i} > (\delta - \sigma_1)/\delta$$

Step III. Step II の i) ii) を満たす区間が 高々 l 個あって $2l+1$ 個は存在しない区間 $[0, \rho_L]$ を考へる。

i) $[0, \rho_L]$ の部分区間で (3.2), (3.3) が成立する

区間が存在する。ii) τ を適当にとることにより (3.1) も

成立するように出来る。よって $[0, \rho_0]$ の部分区間で Step I をおこなう

そのが存在することになり, 結果として $[0, \rho_0]$ の中に $M+1$ 個の Step

i) ii) をおこなう disjoint interval が存在することになり矛盾が成立する。

ここで $\text{Meas } I = 0$ は Step III の ii) のみにつかう。それ以外は uniformly coarse などで適用していい。

IV Step I の証明

(1). 最初にいくつかの準備をする。

○ 次の Lemma が成立するよりの σ を固定する。

Lemma (4.1) $d'(x, y) < \delta/20$ とする。このとき $0 \leq t \leq \sigma$ ならば次式が成立する

$$d'(\varphi(t, 0, x), \varphi(t, 0, y)) < \frac{\delta}{70} \exp\left(1 + e + \int_0^t p(\alpha, x) d\alpha\right)$$

この Lemma は座標変換によって之が成た式と Gronwall の不等式から出てくる。

○ 次の式をおこなう M を固定する。

$$|p(t, x)| \leq M-1 \quad \forall (t, x) \in I$$

これは I の compactness と splitting の continuity から出てくる。

○ 次の条件をおこなう k を固定する。

$(0, x^{(m)}) \in I \quad m=1, 2, \dots, k$ のうち i, j が存在して

$$d(x^{(i)}, x^{(j)}) < \frac{\delta}{20N} \quad \text{となる。}$$

○ 最後に次の一般化的 Lemma を準備する。

Lemma (4.2) $f(t)$ は $[0, \tau]$ で連続で次の条件が

成立するとする。 i) $|f(t)| < M$, ii) $\int_0^T f(\tau) d\tau < -D$ ($D > 0$)

iii) $k = [D/M]$ ($[]$ は Gauss 記号)

このとき $k+1$ 個の整数 $s_0 < s_1 < \dots < s_k \leq T$ が存在して
任意の $0 \leq t \leq T$, 任意の $0 \leq i \leq k$ に対して $\int_{s_i}^t f(\tau) d\tau \leq M$
が成立する。

この Lemma は初等的だが今後の議論で幾度か重要な役割を果たす。

(2) 以上の準備の上で Step I の証明に入ろう。

○ 我々の出発点は次の様である。任意の $\delta > 0$, $D > 0$ に対して
適当な $T > 0$ $(t, x) \in I$ が存在して

$$\int_t^T p(\alpha, x) d\alpha < \delta (T-t) - D \text{ が成立する。}$$

○ $f(t) = p(t, x) - \delta$ とおくと上式は $\int_t^T f(\tau) d\tau < -D$ となる。

○ D は任意だから $M[k + \sigma_\delta] \leq D$ が成立する D を決め

Lemma (4.2) を適用すると

$k+1$ 個 ($k = [k + \sigma_\delta]$) の整数 $t \leq s_0 \leq s_1 < \dots < s_k \leq T$
が存在して 任意の $s_i \leq t \leq T$ に対して $\int_{s_i}^t f(\tau) d\tau \leq M$ が成立する。

○ k の定義より $0 \leq i < j \leq k$ が存在して次式が成立する。

$$d'(\varphi(s_i, 0, x), \varphi(s_j, 0, x)) < \delta/20$$

$$s_i + \sigma_\delta < s_j + \sigma_\delta \leq s_k + \sigma_\delta \leq T$$

$$\int_{s_i}^t f(\tau) d\tau \leq M \quad s_i \leq t \leq s_j + \sigma_\delta$$

ここで $\tau = s_j - s_i$ とおき 必要ならば $\varphi(s_i, 0, x)$ を x と
置きかえると次式が得られる。

$$\int_0^t \dot{p}(\alpha, x) d\alpha \leq \delta t + M \quad 0 \leq t \leq \tau + \delta$$

$$d'(x, \varphi(\tau, 0, x)) < \delta/20$$

よって (3.1), (3.2), (3.3) が証明された。

V. Step II の証明

(1) いくつかの準備, 次の 3つの Lemma を仮定する。

◦ Lemma (5.1) (Pugh [9])

p_0, \dots, p_m を M 上の有限個の相異なる点とし $\alpha = 10 d(p_0, p_m)$

とす。このとき次の条件を満たす p_i, p_j が存在する。

a) $d(p_i, p_0) < \alpha, \quad d(p_j, p_0) < \alpha$

b) $i \neq j$ のとき $d(p_i, p_j) > 0.9 d(p_i, p_j)$

$d(p_i, p_j) > 0.9 d(p_i, p_j)$

◦ Lemma (5.2) (Pliss [5])

$x = X(x, t)$ の flow を $\varphi(t, t_0, x_0)$ とする。 $(t_0, x_0) \in I$

このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\theta > 0, \tau > 0$ が存在して次のことが

成立する: $d(x_0, x) < \tau, \quad d(x_0, y) < \tau$ を満たす任意の

x, y に対して次の条件を満たす T. D. P. S. である $Y(x, t)$ が

存在する (この flow を $\psi(t, t_0, x_0)$ とする)

a) φ と ψ は C^1 -topology で ε 以内である

b) $\psi(\theta, -\theta, \varphi(-\theta, 0, x)) = \varphi(\theta, 0, x)$

c) perturbation の support は

$$\left\{ (\varphi(t, 0, z), t) \mid d(z, x) \leq 0.9 d(x, y) \text{ or } d(z, y) \leq 0.9 d(x, y) \right\}$$

$-\theta \leq t \leq \theta$

◦ Lemma (5.3) $\delta_1 = 0.2 \frac{h}{M} \delta$, $2\theta V = [\sigma_1/\delta]$ とする。

このとき任意の $0 \leq i \leq V$ に関して次式が成立する。

$$d'(\varphi(2\theta i + \tau), \varphi(2\theta i)) \leq \frac{\delta}{\tau_0} \exp\left(1 + e + \int_0^{2\theta i} p(\alpha, x) d\alpha\right)$$

ここで $\varphi(t) = \varphi(t, 0, x)$ とする。

(2) 上の主張を前提として Step II の証明に入る。

まず $\varphi(t)$ ($0 \leq t \leq \sigma_1/\delta$) の tubular nbd $S(t)$ を考える。

$$S(t) = \{x \in M \mid d'(x, \varphi(t)) < \delta \exp\left(1 + e + \int_0^t p(\alpha, x) d\alpha\right)\}$$

$0 \leq t \leq \sigma_1/\delta$ 。このとき次の主張が成立する。

◦ 主張 (5.4)

各 $0 \leq i \leq V$ ($2\theta V = [\sigma_1/\delta]$) に関して次の点集合

$$\{\varphi(2\theta i + m) \mid m = 0, 1, \dots, \tau\}$$

このとき次の条件を満たす $0 \leq m_{2i} < m_{2i+1} < \tau$ が存在する。

a) $j = 0, 1$ に対して $\varphi(2\theta i + m_{2i+j}) \in S(2\theta i)$

b) $j = 0, 1$, $0 \leq m \leq \tau$ ($m \neq m_{2i}, m_{2i+1}$) に対して

$$d'(\varphi(2\theta i + m_{2i+j}), \varphi(2\theta i + m)) > 0.9 d'(\varphi(2\theta i + m_{2i}), \varphi(2\theta i + m_{2i+1}))$$

これは Lemma (5.1) の単純な応用である。

◦ 主張 (5.5)

上の m_{2i}, m_{2i+1} に関して次式が成立する。

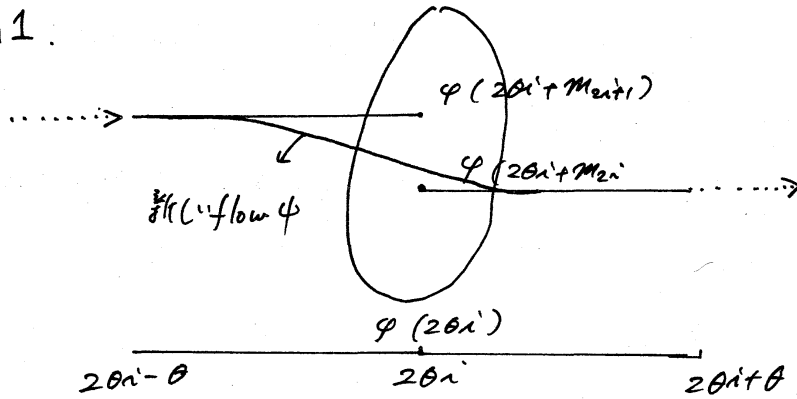
$$\int_{2\theta i + m_{2i}}^{2\theta i + m_{2i+1}} p(\alpha, x) d\alpha \geq 0.9 h (m_{2i+1} - m_{2i})$$

ここで h は uniformly coarseness h の任意の periodic orbit (その period β) に対して $\frac{1}{\beta} \int_0^\beta p(\alpha, x) d\alpha > h$ が成立するものと

Lemma (5.2) を 図 1 のように応用することによって導かれる。ただし

新しい flow による perturbation は $\alpha, 1$ 以下にする

図 1.

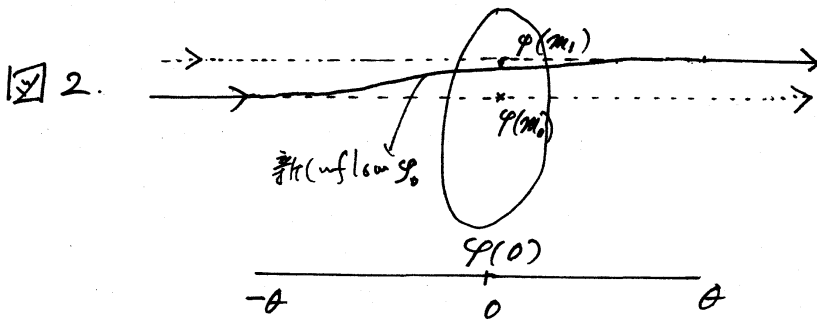


主張 (5.6)

この $[m_{2i}, m_{2i+1}]$ ($0 \leq i \leq 2$) は disjoint に存在することになる。

この証明も Lemma (5.2) の応用だが 前と少し様子が異なるので説明しよう。まず $[m_0, m_1]$ は 主張 (5.4) のとおりである。次に 図 2 のように $\varphi(m_0 - \theta)$ から $\varphi(m_1 + \theta)$ までの path をとり作業を行う。

(点線と部分がマシである。)



この新しい flow を φ_0 とし $\tau^0 = \tau - (m_1 - m_0)$ とする。この $\varphi_0 \tau = \tau$

(3.1), (3.2), (3.3) が成立することはいちそう容易である。従ってこの φ_0 に

主張 (5.4) を再度用いて $\varphi_0(2\theta + m_{2j}) \in S(2\theta)$ ($j=0, 1$)

かつ $m_1 < 2\theta + m_2$ とする。また $0 < m_2 < m_3 < \tau_0$ とする。

ここで上同様にして $\varphi_0(2\theta + m_2 - \theta)$ 及び $\varphi_0(2\theta + m_3 + \theta)$ まで path をとりとり新しい flow を φ_1 とする。以下同様に行なう。

VI Step III の証明

(1) 区間 $[0, \rho_0]$ の中には高々 N 個の区間 $[h_i, h'_i]$ での条件を満たすものがあるとする。

$$\int_{h_i}^{h'_i} p(\alpha, x) d\alpha \geq 0.8h(h'_i - h_i), \quad h'_i - h_i > (\delta - \sigma_1)/\delta$$

$$0 \leq h_1 < h'_1 \leq h_2 < h'_2 < \dots < h_N < h'_N = \rho_0$$

我々は $[0, \rho_0]$ の中に (3.2), (3.3) を満たす部分区間 $[s_i, s_{i+1}]$ を見つけることにする。ここでは uniformly coarseness を仮定する。

○ $f(t) = p(t, x) - \delta$ とおくと

$$\int_{h_i}^{h'_i} f(\tau) d\tau \geq 0.7h(h'_i - h_i)$$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leq M \quad (0 \leq t \leq \rho_0)$$

積分値 $\int_0^t f(\tau) d\tau$ は小さいのに $[0, \rho_0]$ の中に積分値の大きい区間が多く存在するといふことは、区間 $[h'_i, h_{i+1}]$ のうちには積分値は負でその絶対値の大きいものも多くあるはずである。そのような区間

$$[h'_i, h_{i+1}] \text{ のうち } \int_{h'_i}^{h_{i+1}} f(\tau) d\tau < -0.3h(\delta - \sigma_1)/\delta \text{ とする区間}$$

のみを拾い出し、それ以外の区間を整理統合して新しい区間

$$\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \tau_{n+1} \text{ とする。このとき}$$

$$I_j = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(\tau) d\tau, \quad 2J_j = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(\tau) d\tau \text{ とおくと次式が成立する。}$$

$$\sum_{j=1}^m I_j > 0.3 \nu h(\sigma - \sigma_1)/\delta, \quad 2J_1 < -0.3 h(\sigma - \sigma_1)/\delta$$

○ 次に $[t_{j-1}, t_j]$ に対して 1 次対称 θ_{j-1} が存在する。

$$\int_{t_{j-1}}^{\theta_{j-1}} f(\tau) d\tau = J_j, \quad \int_{\theta_{j-1}}^{t_j} f(\tau) d\tau \leq 0 \quad (\theta_{j-1} \leq t \leq t_j) \text{ かつ}$$

$$\int_{\theta_{j-1}}^{t_j} f(\tau) d\tau = J_j. \quad \text{このとき 次の主張が成立する。}$$

主張 (6.1)

(a) δ に関係関数 $L(\delta)$ ($L(\delta) \rightarrow \infty$ as $\delta \rightarrow 0$) が存在して 次の不等式が成立する。

$$\theta_{j-1} - t_{j-1} \geq -L(\delta) J_j, \quad t_j - \theta_{j-1} \geq -L(\delta) J_j$$

(a) $L(\delta) > 10 \sigma / h(\sigma - \sigma_1)$ とする $L(\delta)$ に対して

$$t_j - \theta_{j-1} \geq \sigma/\delta \text{ が成立する。}$$

○ $\{\theta_i\}_{i=0, \dots, m-1}$ を更に 2 種類 $\{\theta_{j(n)}\}_{n=1, \dots, m}$

$\{\theta_{k(n)}\}_{n=1, \dots, q}$ ($m+q=n$) に分ける。

$\theta_{j(n)}$ とは $\int_{\theta_{j(n)}}^{t_n^*} f(\tau) d\tau \geq 0.3 h(t_n^* - \theta_{j(n)})$ とする t_n^* かつ $(\theta_{j(n)} \leq t_n^* \leq t_n)$ 存在する対称 $\theta_{j(n)}$ のことである。

$\theta_{k(n)}$ は $\theta_{j(n)}$ 以外の $\theta_{i(n)}$ のことである。このとき次の主張が成立する。

主張 (6.2)

$$-0.3 h L(\delta) \sum_{i=1}^m J_{j(n)+1} < \sum_{j=1}^m I_j$$

$$- \sum_{i=1}^q J_{k(n)+1} > 0.1 \nu h(\sigma - \sigma_1)/\delta$$

これは $\theta_{j(n)}$ が多ければ成り立つことを示す。以後 $\theta_{k(n)}$ に焦点を合わせる。

○ 主張 (6.3)

各区間 $[t_{k(n)}, \theta_{k(n)}]$ には $[-J_{k(n)+1}/\mu]$ 個の $\alpha \in S_\beta^n$ が

$(\tau_{k(n)} \leq S_n^i \leq \theta_{k(n)})$ が存在して任意の $S_n^i \leq t \leq \theta_{k(n)}$ に関して $\int_{S_n^i}^t f(\tau) d\tau \leq M$ が成立する。(従って任意の $S_n^i \leq t \leq \tau_{k(n)+1}$ に対して $\int_{S_n^i}^t f(\tau) d\tau$ も成立する。)

これは単なる Lemma (4.2) の応用である。

各 n に関して $\{S_n^i\}$ が存在するから、これを適当に番号をつけて $\{S_n^i\}_{i=1, \dots, A}$ とする。このとき次式が成立する。

$$\begin{aligned} \int_{S_n^i}^t p(\alpha, x) d\alpha &\leq \delta(t - S_n^i) + M \quad (S_n^i \leq t \leq S_n^i + \delta) \\ \int_{S_n^i}^t p(\alpha, x) d\alpha &\leq 0.4h(t - S_n^i) + M \quad (S_n^i \leq t \leq S_A) \end{aligned}$$

これで Step III の i) が確かめられた。

(2) 次に (3.1) をみたす $[S_n^i, S_n^j]$ を見つければ。

ここで初めて $\text{Meas } I = 0$ をつかう。次の主張が成立する。

○ 主張 (6.4)

$\{S_n^i\}$ の個数 即ち A は次の不等式をみたす。

$$\text{ある } \eta \text{ が存在して } A > \eta \delta^{-2}$$

○ この主張と $\text{Meas } I = 0$ をつかって $d(\varphi(S_n^i), \varphi(S_n^j)) < \frac{\delta}{20N}$ とする i, j が存在することを示す。もしそのような i, j が存在しなかったとすると、すると各 $\varphi(S_n^i)$ の $\delta/40N$ nbd は disjoint である。今 $U_\delta \subset I$ の $\delta/40N$ nbd の大きさを δ とする。このとき $\text{Meas } U_\delta > A\pi(\delta/40N)^2$ が成立する。この式に主張 (6.4) の A の値を代入すると $\text{Meas } U_\delta > \eta\pi/40N^2$ 。と $\delta \rightarrow 0$ とすると $\text{Meas } U_\delta \rightarrow 0$ となる。これは矛盾。よって証明された。

参考文献

- [1] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 158 (1972)
- [2] R. Mañé, Expansive diffeomorphisms, Dynamical Systems - Warwick 1974, Springer Lecture Note 468
- [3] V. Pliss, The Coarseness of a Sequence of Linear Systems of Second-Order Differential Equations with Periodic Coefficient
- [4] V. Pliss, Properties of Solutions of a Sequence of Second-Order Periodic Systems with Small Nonlinearities.
- [5] V. Pliss, A Variant of a Lemma Concerning Closure
 以及 [3] [4] [5] 在 Differential Equations 7 (1971)
- [6] V. Pliss, The Location of Separatrices of Periodic Saddle-Point Motions of Second Order Differential Equations, D.E. 7. (1971)
- [7] V. Pliss, Properties of Solutions of a Periodic System of Two Differential Equations Having an Integral Set of Measure zero,
 D.E. 8 (1972)
- [8] C. Robinson, Stability, Measure Zero, and Dimension Two Imply Hyperbolicity (pre-print 1979)
- [9] C. Pugh, The closing lemma, Amer. J. Math 89 (1967).